Banque « Agro-Véto »
AT - 0617

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le rang de f, et la dimension du noyau de f.
   (b) Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.
   (c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = u$. On veillera à ce que la troisième coordonnée de v soit égale à -1.
   (d) Soit $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que $f(w) = v$.
   (b) Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).
   (c) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w). Donner l'expression de P.
   (d) Calculer l'inverse de P.
   (e) Montrer que $P^{-1}AP = N$.
3. On calcule dans cette question les puissances successives de A.
   (a) Calculer N^2 et N^3.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, N^n est la matrice nulle.

(c) Déduire des questions qui précèdent la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

4. Dans cette question, on cherche à déterminer si l'endomorphisme f est diagonalisable. On rappelle que A est la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) On rappelle que f^3 désigne l'endomorphisme $f \circ f \circ f$. Montrer que f^3 est l'endomorphisme nul.

   (b) Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f. Montrer que nécessairement, on a $\lambda^3 = 0$.

   (c) En déduire que si f est diagonalisable, alors il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dont chaque vecteur appartient au noyau de f.

   (d) A l'aide des questions qui précèdent, conclure.

Exercice de probabilités

Soit X une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une densité de X est la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On définit une nouvelle variable aléatoire Y, en posant :

$$Y = \exp(-X) = e^{-X}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

1. Questions de cours

Dans tout l'exercice, on désigne par F_X la fonction de répartition de X, et par F_Y celle de Y. On tiendra pour acquis que $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ pour tout réel x positif.

1. Donner la valeur de $F_X(x)$ lorsque x est un réel strictement négatif.
2. Rappeler la valeur de $E(X)$ (qui désigne l'espérance de X).
3. (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$.

   (b) En utilisant le théorème de transfert, calculer alors l'espérance $E(Y)$ (on admet sans démonstration que Y a bien une espérance).

2. Fonction de répartition de la variable aléatoire Y

Dans cette partie, on se donne un nombre réel a.

1. Résoudre l'inéquation $e^{-x} \leq a$ (l'inconnue, x, étant un un nombre réel). On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif.
2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

   (a) Montrer que $P(Y \leq a) = P(X \geq -\ln(a))$.

   (b) Montrer que :
   $$F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$$

   (c) On suppose dans cette question que $a > 1$; donner alors le signe de $-\ln(a)$. En déduire l'expression de $F_Y(a)$.

   (d) On suppose dans cette question que $a \in [0, 1]$, montrer qu'alors $F_Y(a) = a$.

3. Lorsque a est négatif, calculer $F_Y(a)$.
4. Tracer alors l'allure de la courbe représentative de F_Y.

3. Densité de la variable aléatoire Y

1. (a) Montrer que la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
   (b) Calculer la dérivée de F_Y sur chacun de ces intervalles.
2. On admet que la variable aléatoire Y est à densité, et qu'une densité de Y est obtenue à l'aide de la dérivée de F_Y. Reconnaître la loi classique suivie par Y, et en donner les paramètres éventuels.

Exercice d'analyse

Dans tout cet exercice on se donne deux nombres réels a et k. On suppose que k est strictement positif.

1. Etude d'une fonction

On considère f la fonction de $]-\frac{a}{k}, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie pour tout $x > -\frac{a}{k}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{kx + a}$$

1. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur $]-\frac{a}{k}, +\infty[$. Donner la dérivée de f sur cet intervalle.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-\frac{a}{k}, +\infty[$.
3. Donner le tableau de variations de f sur $]-\frac{a}{k}, +\infty[$. On fera apparaître les limites.
4. Soit $x > -\dfrac{a}{k}$; montrer que $f'(x) + kf(x)^2 = 0$.
5. Dans cette question, on suppose que a et k sont strictement positifs.
   (a) Montrer que 0 appartient à l'intervalle $]-\frac{a}{k}, +\infty[$.
   (b) Déterminer la valeur de a pour que l'on ait $f(0) = 1$.

2. Etude d'une équation différentielle

On se donne I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tel que que $[0, 3] \subset I$. On rappelle que k est un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle :

$$y' + ky^2 = 0 \quad (E)$$

On va s'intéresser uniquement aux solutions qui sont définies sur I. On admettra, et on pourra utiliser dans tout l'exercice, que si y est une solution non nulle de (E) définie sur l'intervalle I, alors y ne s'annule en aucun point de I.

1. Soit y une solution de (E), que l'on suppose définie sur I, et non nulle.
   (a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{y(x)}$ est bien définie sur I, dérivable sur I, et calculer sa dérivée en fonction de y et de y'.
   (b) Montrer que pour tout $x \in I$, $u'(x) = k$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$

$$y(x) = \frac{1}{kx + a}$$

2. On dispose de trois fonctions y_1, y_2, et y_3 que l'on suppose définies et dérivables sur l'intervalle I. On dispose de certaines valeurs numériques, prises par les fonctions y_1, y_2, et y_3, résumées dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$y_1(x)$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
$y_2(x)$	9	5	3	2
$y_3(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	-1

   (a) Montrer que y_1, y_2, et y_3 sont continues sur I.

   (b) Montrer que y_3 s'annule sur l'intervalle $[0, 3]$. Expliquer alors pourquoi y_3 ne peut pas être solution de l'équation (E).

   (c) Donner à partir du tableau ci-dessous, un tableau de valeurs pour les deux fonctions $\frac{1}{y_1}$ et $\frac{1}{y_2}$. Expliquer alors pourquoi seule une de ces deux fonctions, y_1 ou y_2, peut être solution de l'équation (E). Préciser laquelle.

   (d) En admettant que cette fonction soit bien solution de (E), quelles seraient les valeurs de a et de k ? Donner alors l'expression de cette solution en fonction de x.

Remarque culturelle : l'équation non linéaire présentée dans cet exercice intervient en cinétique chimique pour l'étude des réactions d'ordre 2. Les solutions d'une telle équation sont généralement constituées par un couple (f, J) où J est l'ensemble de définition de la fonction f. On a simplifié ce point technique en se concentrant sur une solution définie sur un intervalle I fixé d'avance, mais contenant l'origine des temps. Les fonctions étudiées en première partie sont alors exactement les solutions non nulles de l'équation (E).