Banque Agro-Véto
A – 0316

PHYSIQUE-CHIMIE
Résolution de problème
Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

Écoulements sanguins et échographie

Le système cardio-vasculaire a pour fonction d'apporter aux tissus et aux organes du corps l'oxygène et les nutriments nécessaires à leur fonctionnement, ainsi que de les débarrasser des déchets générés par leur métabolisme. Ces besoins étant très divers et variables dans le temps, le système cardiovasculaire doit pouvoir assurer la distribution sanguine de façon adaptée et ajustable dans une large plage de valeurs tout en étant capable de faire circuler le sang des artères jusqu'aux capillaires.

Dans la première partie de ce problème, nous nous proposons d'étudier un modèle simplifié d'écoulement sanguin dans une artère modélisée par un tronçon cylindrique rigide. La présence d'une sténose, c'est-à-dire un rétrécissement de l'artère, sera étudiée dans un second temps. Dans la seconde partie du problème, une méthode de diagnostic, l'échographie Doppler, est étudiée.

A Mécanique des fluides et écoulements sanguins

A.1 Écoulement de Poiseuille cylindrique

L'écoulement du sang dans une artère peut être décrit en première approximation comme l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Ox), de rayon R et de longueur L, illustré sur la figure 1. On notera η la viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique. On suppose que l'écoulement est laminaire en régime permanent et que les phénomènes de pesanteur sont négligeables du fait de l'échelle du problème. Pour les applications numériques, la masse volumique du sang ρ sera prise égale à $1{,}06 \cdot 10^3$ kg·m^{-3} et la viscosité dynamique η à 6 mPa·s.

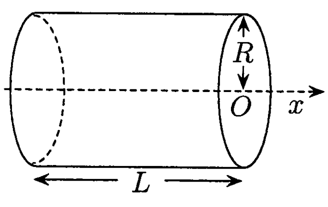

FIGURE 1 – Artère.

A.1.1 Donner la définition d'une ligne de courant et d'un écoulement incompressible. Expliquer ce qu'est un écoulement laminaire et ce qu'est un écoulement turbulent. Donner l'expression du nombre de Reynolds Re et l'ordre de grandeur de Re qui permet de différencier les régimes d'écoulement laminaire et turbulent dans un tronçon cylindrique.

A.1.2 Définir le débit volumique Q_{v} et le débit massique Q_{m}. En régime permanent, justifier le caractère conservatif d'un flux de masse. Écrire la condition pour que le débit volumique et le débit massique d'un fluide soient proportionnels. Donner la relation qui relie ces deux grandeurs dans cette situation.

Le profil de vitesse dans ce tronçon cylindrique de rayon R, de longueur L et d'axe suivant $\vec{e}_x$ est un écoulement de Poiseuille et a ainsi pour expression

$$\vec{v} = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(R^2 - r^2\right)\vec{e}_x$$

où $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique. On note r la coordonnée radiale, c'est-à -dire la distance à l'axe (Ox).

A.1.3 Expliquer pourquoi on peut chercher un profil de vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_x$. Justifier que ΔP est positif.

A.1.4 Écrire la condition aux limites que doit respecter le champ des vitesses et représenter graphiquement ce champ des vitesses.

A.1.5 Exprimer le débit volumique Q_v en fonction de η, R, ΔP et L. Établir l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement v_{m}.

A.1.6 Définir la résistance hydraulique du tube et l'exprimer en fonction de la différence de pression ΔP et du débit volumique Q_{v}. À l'aide de la question précédente, donner son expression en fonction de la longueur du tube L, de son rayon R et de la viscosité du fluide η.

A.1.7 *Application à la circulation sanguine* : on considère un tronçon cylindrique modélisant une artère de rayon R, de longueur L, auquel est appliquée une différence de pression ΔP. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement v_{m}, puis le nombre de Reynolds de l'écoulement. Précisez la nature de l'écoulement.

Données : $R = 6\,\mathrm{mm}$; $L = 8\,\mathrm{cm}$; $\Delta P = 40\,\mathrm{Pa}$.

A.2 Modélisation d'une sténose

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. Schématiquement, cette situation peut être représentée comme étant la superposition de trois tronçons cylindriques, de même axe, et de rayons différents, R, R_S et R comme illustré sur la figure 2. La sténose correspond au tronçon de plus faible rayon et est située entre les abscisses $x = L$ et $x = L + L_S$.

A.2.1 Représenter schématiquement les lignes de courant entre $x = 0$ et $x = 2\,L + L_s$.

A.2.2 On note Q_1, Q_2 et Q_3 les débits volumiques à travers les sections situées respectivement en $x = 0$, $x = L + L_S/2$ et $x = 2\,L + L_S$. Donner en justifiant la(les) relation(s) qui lie(nt) ces différents débits et le débit volumique total Q_{v} dans le vaisseau sanguin. En déduire la conséquence de ce résultat sur la vitesse moyenne du fluide au niveau de la zone sténosée entre $x = L$ et $x = L + L_S$.

A.2.3 Donner la relation liant la résistance hydraulique totale $R_{h,tot}$ en fonction du débit total dans le vaisseau sanguin Q_{v} et la différence de pression entre l'entrée et la sortie P_e et P_s (avec

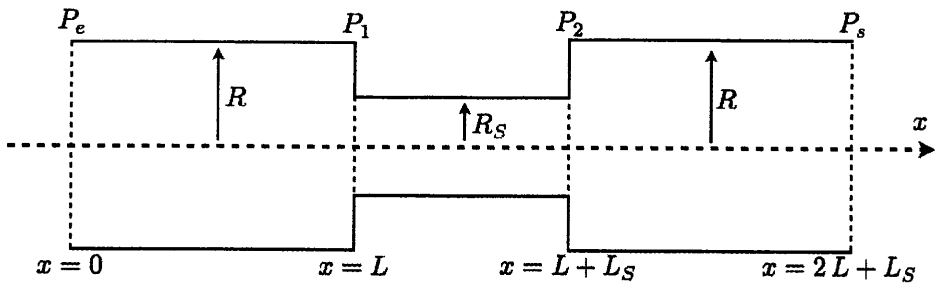

FIGURE 2 – Schéma d'une sténose.

$P_e > P_s$). Exprimer la résistance hydraulique totale en fonction de la résistance hydraulique de chaque sous-partie, $R_{h,1}$, $R_{h,2}$ et $R_{h,3}$.

A.2.4 Déterminer la différence de pression de part et d'autre de la sténose $P_2 - P_1$ en fonction des différentes résistances hydrauliques et de la différence de pression totale $P_s - P_e$.

A.2.5 *Application numérique* : on considère une artère de rayon R, de longueur totale $2\,L + L_s$, à laquelle est appliquée une différence de pression ΔP. Une sténose se développe dans cette artère et conduit à un rétrécissement local de l'artère sur une distance L_s où le rayon de l'artère devient R_S. Déterminer la vitesse moyenne dans la zone sténosée. En déduire le nombre de Reynolds dans chaque partie de l'artère. Déduire une information sur la nature de l'écoulement. Préciser quelle méthode peut être utilisée pour diagnostiquer une sténose.

Données : $R = 6\,\text{mm}$; $2\,L + L_s = 8\,\text{cm}$; $\Delta P = 40\,\text{Pa}$; $L_s = 1\,\text{cm}$; $R_S = 2\,\text{mm}$.

B Vélocimétrie par effet Doppler

Afin d'évaluer les risques de sténoses vasculaires chez un patient, il faut pouvoir estimer localement la vitesse de l'écoulement du sang. Pour cela, on utilise une technique d'échographie Doppler. Le principe de cette mesure est le suivant : une sonde émet une onde ultrasonore de célérité c et de fréquence f_0. Une hématie (globule rouge) se déplaçant à la vitesse v renvoie cette onde à une fréquence différente. Au signal réfléchi sur les hématies se superposent les signaux réfléchis sur les organes immobiles ou les tissus biologiques. Néanmoins ces derniers sont de fréquence identique à celle de la source et ne contribuent donc pas au signal de fréquence différente de la fréquence d'émission. La sonde à ultrasons jouant le rôle d'émetteur et de récepteur est positionnée sur la peau et émet des ultrasons. L'onde incidente fait un angle θ avec le vaisseau à explorer et la présence des hématies dans le sang permet aux ondes de se réfléchir à une fréquence légèrement différente. On prend : $c = 1,5\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $f_0 = 4,0$ MHz.

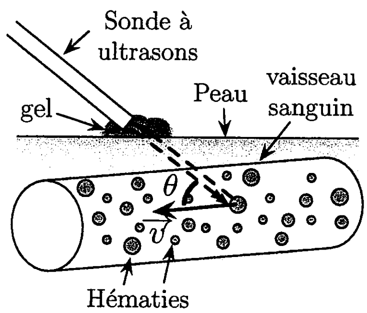

FIGURE 3 – Échographie.

B.1 Mesures de fréquence et vitesse des hématies

La mesure de la différence de fréquence donne accès à la vitesse v des hématies et donc du sang. Pendant la période T_0 de l'onde ultrasonore, on suppose que la distance parcourue par le globule rouge est très petite devant sa distance à la sonde et que l'angle θ entre le faisceau d'ultrasons et le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constante. On définit le décalage en fréquence par $\Delta f = f_2 - f_0$ où f_2 est la fréquence de l'onde reçue par la sonde après avoir été réfléchie par une hématie.

Pour déterminer l'expression du décalage en fréquence Δf, on se place dans le cas $\theta = 0$ dans les questions qui suivent.

B.1.1 Faire un schéma de la situation en représentant un globule rouge se déplaçant avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ parallèle au signal envoyé par la sonde.

B.1.2 Donner le sens du déplacement de l'hématie si le signal reçu par l'émetteur a un décalage en fréquence Δf positif.

B.1.3 Établir, dans le référentiel de l'hématie, l'intervalle de temps Δt_1 qui sépare la réception de deux maxima successifs du signal. Donner alors la fréquence apparente f_1 de l'onde perçue par l'hématie.

B.1.4 L'onde ultrasonore est réfléchie par l'hématie avec une fréquence f_1 dans son référentiel en mouvement rectiligne constant à la vitesse v. Exprimer l'intervalle de temps Δt_2 qui sépare la réception par la sonde de deux maxima successifs de l'onde. En déduire la fréquence f_2 de l'onde réfléchie détectée par la sonde.

B.1.5 Dans la pratique, les hématies ont une vitesse v très petite devant la célérité des ultrasons. Simplifier en justifiant la relation établie à la question B.1.4.

En réalité, la sonde est orientée d'un angle θ par rapport au vaisseau sanguin et la fréquence reçue par la sonde a pour expression

$$f_2 = f_0 \left(1 - \frac{2\,v}{c} \cos\theta\right)$$

Une mesure effectuée au niveau de l'aorte par la sonde conduit à une différence de fréquence $f_2 - f_0$ égale à $2,0$ kHz pour un angle θ de 20°.

B.1.6 Vérifier la cohérence de la formule obtenue à la question B.1.5 avec l'expression donnée ci-dessus.
Application numérique : Donner la vitesse des globules rouges dans ce vaisseau sanguin. Expliquer qualitativement pourquoi un médecin ne peut obtenir une mesure aussi précise de la vitesse des hématies en pratique.

B.1.7 Décrire comment la connaissance de la vitesse des hématies permet d'aider à établir un diagnostic médical.

B.1.8 L'analyse spectrale des fréquences Doppler peut conduire à différents types de signaux : aucun signal, un spectre fréquentiel très dispersé où un spectre étroit. Décrire les situations auxquelles correspondent ces différentes possibilités.

B.2 Traitement du signal

En pratique, le signal d'entrée qui parvient au récepteur est composé de différentes fréquences : la fréquence $f_0 + f_2$ et la fréquence $|f_0 - f_2|$. On désire filtrer le signal pour ne garder que la composante qui décrit la vitesse des hématies. On considère pour cela le filtre, représenté sur la figure 4, branché sur une charge d'impédance infinie, c'est-à-dire avec $i_s = 0$. On se place en régime sinusoïdal forcé, de pulsation ω. À toute fonction sinusoïdale $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \phi)$, on associe sa représentation complexe $\underline{f} = f_0 \exp[\mathrm{j}\,(\omega t + \phi)]$.

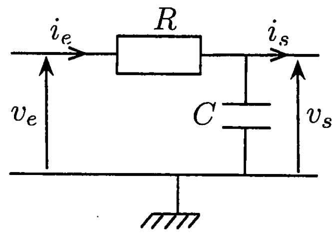

FIGURE 4 – Filtre.

B.2.1 Rappeler brièvement l'intérêt de la notation complexe. Rappeler la définition de l'impédance complexe d'un dipôle.

Le filtre est constitué d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C. On supposera que la tension à l'entrée provient de la mesure effectuée par la méthode Doppler et que ce signal est sinusoïdal de la forme $v_e(t) = v_0 \cos(\omega t)$. La tension de sortie est notée $v_s(t)$.

B.2.2 Donner les équivalents d'un condensateur à basse et haute fréquences. En déduire les limites basse et haute fréquences de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s/\underline{v}_e$. Déterminer à quel type de filtre cela correspond et justifier son intérêt dans la situation présente.

B.2.3 Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s/\underline{v}_e$. En particulier, donner les expressions des constantes a et ω_0 qui permettent d'écrire le résultat sous la forme : $\underline{H} = \dfrac{a}{1 + \mathrm{j}(\omega/\omega_0)}$.

B.2.4 Calculer le module de la fonction de transfert $G(\omega) = |\underline{H}|$.

B.2.5 En considérant que l'on veut filtrer le signal provenant de la mesure de la différence de vitesse, donner la condition sur ω_0 pour que ce filtre soit efficace.
Application Numérique : Calculer la valeur de la fréquence de coupure pour une résistance $R = 3\,\mathrm{k\Omega}$ et une capacité $C = 20\,\mathrm{nF}$. Commenter ce résultat.

B.3 Échographie, gel et peau

En pratique, lors de l'échographie, une couche de gel doit être placée entre la sonde à ultrasons et la peau du patient pour optimiser le signal. On se propose dans cette partie d'étudier pourquoi. Pour cela, on considère une situation modèle : un fluide de masse volumique ρ et de pression P_0 à l'équilibre. Lors du passage d'une onde sonore, le champ local de pression s'écrit alors $P_0 + p(x,t)$ (p est la surpression) et le champ des vitesses dans le fluide $\vec{u} = u(x,t)\,\vec{e}_x$. Dans toute cette section, on considère la propagation d'ondes planes progressives sinusoïdales. L'impédance acoustique d'un milieu est définie par le rapport $Z = p/u$ et peut s'écrire $Z = \pm\rho c$ où c est la célérité du son dans ce milieu et le signe $\pm$ dépend du sens de propagation de l'onde progressive (signe $+$ si l'onde se propage dans le sens de x croissant, signe $-$ si elle se propage dans le sens de x décroissant).

La célérité des ondes progressives dans un milieu peut s'exprimer, en fonction de la densité du milieu à l'équilibre ρ_0 et du coefficient de compressibilité du milieu χ, par la relation : $c = 1/\sqrt{\rho_0 \chi}$. Par exemple, dans l'air, la célérité du son à 20 °C, c_{air}, est environ égale à 340 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et l'impédance acoustique de l'air, Z_{air}, vaut 400 $\mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$.

B.3.1 Un tissu biologique mou autre que les os ou les poumons a généralement des caractéristiques proches de celles de l'eau : $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$; $\chi = 4,5{\cdot}10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$. Calculer la célérité du son et l'impédance acoustique dans un tel milieu et commenter ces valeurs.

À l'interface (dioptre acoustique) de deux milieux d'impédances Z_1 et Z_2 (définies pour une onde se propageant dans le sens de x croissant), où la célérité des ondes est c_1 et c_2, on peut définir les coefficients de réflexion R et de transmission T de l'énergie acoustique de l'onde incidente

$$R = \left|\frac{u_r(0,t)}{u_i(0,t)}\right|^2 \qquad \text{et} \qquad T = 1 - R,$$

où $u_i(0,t)$ est le champ des vitesses dans le fluide, au niveau de l'interface située en $x = 0$, dû à l'onde incidente, et $u_r(0,t)$ le champ des vitesses dans le fluide, au niveau de l'interface, dû à l'onde réfléchie. En l'absence d'onde sonore, la pression est à l'équilibre de part et d'autre de l'interface et vaut P_0.

Une onde progressive se propage alors dans le domaine $x < 0$ dans le sens de x croissant. Le champ des vitesses et la surpression associés à cette onde incidente sont $u_i(x,t)$ et $p_i(x,t)$. Lorsque l'onde atteint le dioptre acoustique situé en $x = 0$, une onde est transmise dans le domaine $x > 0$, à laquelle sont associés le champ des vitesses $u_t(x,t)$ et la surpression $p_t(x,t)$, et une onde est réfléchie dans le domaine $x < 0$, à laquelle sont associés le champ des vitesses $u_r(x,t)$ et la surpression $p_r(x,t)$. Les sens de propagation des trois ondes (incidente, réfléchie et transmise) sont indiqués à la figure 5.

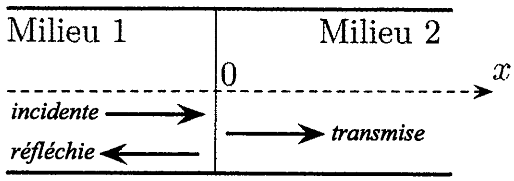

FIGURE 5 – Dioptre acoustique.

B.3.2 Expliquer pourquoi le champ des vitesses dans le fluide et la surpression sont continus de part et d'autre de l'interface. Donner les équations qui en résultent.

B.3.3 Exprimer les coefficients de réflexion et de transmission, R et T, de l'onde ultrasonore en fonction des impédances des milieux 1 et 2, Z_1 et Z_2.

B.3.4 *Application Numérique :* Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T de l'énergie acoustique de l'onde à l'interface air-tissu biologique mou. Expliquer pourquoi il est nécessaire d'éviter la présence d'un film d'air entre la sonde et la peau lors de l'échographie.

B.3.5 Durant les diagnostics, un médecin applique un gel entre la sonde et la peau. Proposer une explication et donner une estimation numérique de l'impédance acoustique de ce gel.

FIN DU SUJET