Banque « Agro-Véto »
C – 0217

PHYSIQUE
Durée : 2 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

MODELISATION DE LA CIRCULATION SANGUINE
Une analogie Electricité – Mécanique des fluides

Ce problème comporte de nombreuses parties largement indépendantes et ne nécessite aucune connaissance particulière en biologie.

Dans le domaine cardiovasculaire, afin de pouvoir remplacer certains composants vasculaires déficients (valves cardiaques, artères, …) par des prothèses, il est nécessaire de pouvoir quantifier les pressions et les débits du sang qui va transiter dans ces organes. Ces données vont servir à dimensionner les composants de remplacement pour qu'ils puissent résister aux différentes contraintes imposées par l'environnement d'implantation.

La complexité des phénomènes mis en jeu dans le système circulatoire a incité les chercheurs à proposer des modèles simplifiés qui traduisent cependant la réalité physique de façon satisfaisante et opérationnelle.

A / MODELE A ECOULEMENT PERMANENT

La description hydrodynamique la plus simple assimile l'écoulement sanguin à celui d'un écoulement permanent d'un fluide ***incompressible*** *dans un réseau de conduites élastiques entre un réservoir à haute pression P_a (pression artérielle moyenne) et un réservoir à basse pression P_v (pression veineuse moyenne). Pour chaque lit vasculaire (système d'irrigation d'un ou de plusieurs organes situés entre les deux réservoirs de pression,* ***voir document 1****) et afin de caractériser les pertes de charges dans le réseau des artères et des veines, on utilise une grandeur, notée R_H, définie comme suit :*

$$R_H = \frac{P_a - P_v}{D_V}$$

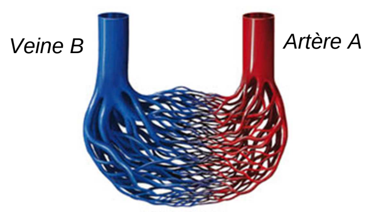
où D_V correspond au débit volumique dans ce lit vasculaire.

A1. En vous basant sur une analogie avec la loi d'ohm en électricité, présenter les correspondances entre les quatre grandeurs hydrauliques P_a, P_v, D_V, R_H et les grandeurs électriques analogues afin d'introduire la notion de résistance *hydraulique*.

A titre d'exemple, on considère le réseau vasculaire d'un organe modélisé, dans le ***document 1****, par un ensemble de N_c* ***capillaires identiques en parallèle*** *dans lesquels circule du sang entre une artère A et une veine B de même diamètre. La loi de Poiseuille est rappelée dans le* ***document 2****.*

<u>Document 1</u> : Description du réseau de capillaires

Rayon d'un capillaire r_c = 5,0 µm
Longueur d'un capillaire l_c = 1,0 cm
Pression au sein de l'artère A P_A = 15 960 Pa
Pression au sein de la veine B P_B = 1330 Pa
Section (constante) de l'artère et de la veine S = 0,20 cm^2
Vitesse débitante du sang dans l'artère A V = 25,0 cm.s^{-1}
Viscosité dynamique du sang η = 5,0 × 10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}



<u>Réseau de capillaires</u>

Document 2 : Mécanique des fluides

Loi de Poiseuille

Pour un tuyau cylindrique de rayon r, de longueur L et un fluide de viscosité dynamique η, la loi de Poiseuille indique que la perte de charge ΔP est reliée au débit volumique D_v par la relation : $D_v = \frac{\pi r^4}{8 \eta L} \Delta P$

Différents types d'écoulements suivant le nombre de Reynolds Re

Re < 2000 : écoulement laminaire

Re > 2000 : écoulement turbulent

A2. Donner un argument qui permet de justifier que le débit volumique sanguin dans l'artère A est égal au débit volumique sanguin dans la veine B.

A3. Calculer le débit volumique D_A dans l'artère A.

A4. Préciser les principales conditions de validité de la loi de Poiseuille. Vérifier son homogénéité à l'aide d'une équation aux dimensions.

A5. Donner l'expression *littérale* de la résistance hydraulique R_{cap} d'un capillaire en fonction de η, l_c *et* r_c.

A6. Calculer le débit volumique D_{cap} du sang dans chaque capillaire en vous aidant des **documents 1 et 2**.

A7. Déterminer le nombre N_c de capillaires présents dans ce réseau.

On considère à présent que la circulation sanguine globale dans un corps humain peut être traduite par le schéma du ***document 3****.*

A8. En mécanique des fluides, à quel dispositif hydraulique le cœur droit et le cœur gauche peuvent-ils être assimilés ? En déduire par quel dipôle électrique ils peuvent être représentés.

A9. A partir du **document 3** et du texte ci-dessous, faire un schéma du circuit électrique modélisant la circulation sanguine globale. On y indiquera les différents débits volumiques (en fonction du débit cardiaque D_c) et les deux pressions apparaissant dans le **document 4**.
Sur le **document 3** on notera que les poumons, modélisables par une résistance R_p située entre le cœur droit et le cœur gauche, sont en "série" avec ces deux parties du cœur. Ces trois "dipôles" sont en effet parcourus par le même débit sanguin appelé débit cardiaque D_c. Ce débit se sépare ensuite dans les différentes branches du circuit systémique (circuit irrigant tous les organes autres que les poumons). Les résistances R_2, R_3, R_4 et R_5, représentant respectivement le cerveau, le foie, les reins et les jambes sont ainsi en dérivation par rapport à la branche principale comprenant les deux cœurs et les poumons. C'est également le cas de la résistance R_1 du système alimentant le muscle cardiaque (qui doit être irrigué comme tout muscle).

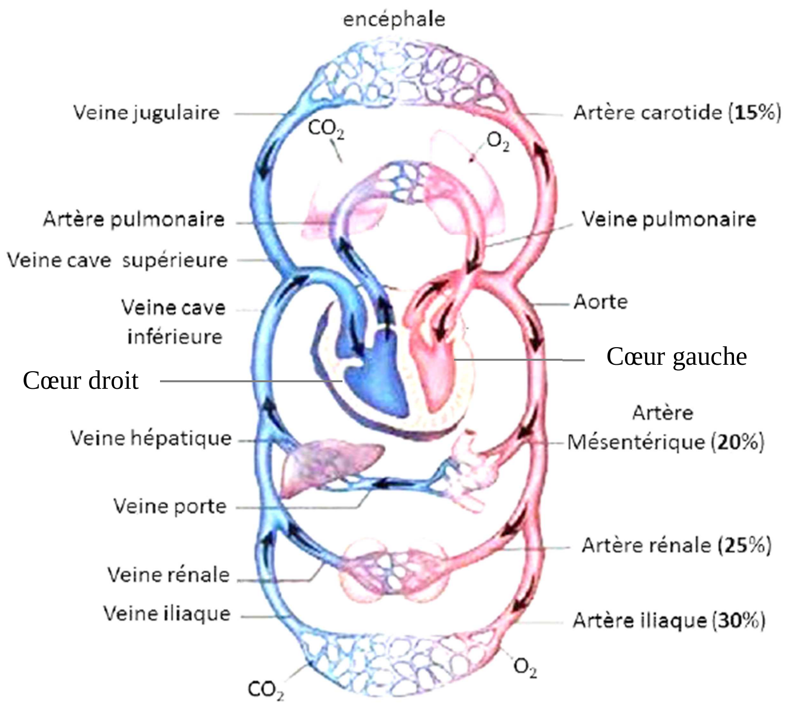
A10. Calculer la vitesse V_a du sang dans l'aorte de diamètre d_a.

A11. Donner l'expression du nombre de Reynolds *Re* pour l'écoulement dans l'aorte puis le calculer numériquement. Commenter le résultat obtenu.

A12. Calculer la résistance hydraulique R_{sys} correspondant au circuit systémique. On proposera un nouveau schéma équivalent simplifié faisant apparaître cette résistance.

A13. La valeur de la résistance hydraulique d'un lit vasculaire dépend de la valeur du débit volumique. Plus celui-ci est important, plus la résistance hydraulique diminue. Proposer un argument pouvant expliquer cette constatation, en utilisant l'expression de la résistance hydraulique établie à la **question A5** et en considérant la nature réelle des conduites (vaisseaux sanguins).

<u>Document 3</u> : Modèle de répartition du débit cardiaque dans le système circulatoire



Fractions *du débit volumique total D_c (ou débit cardiaque) alimentant les grandes parties du circuit systémique en pourcentages. La fraction manquante (10 %) est celle alimentant le muscle cardiaque.*

<u>Document 4</u> : Données pour une personne saine et au repos physique

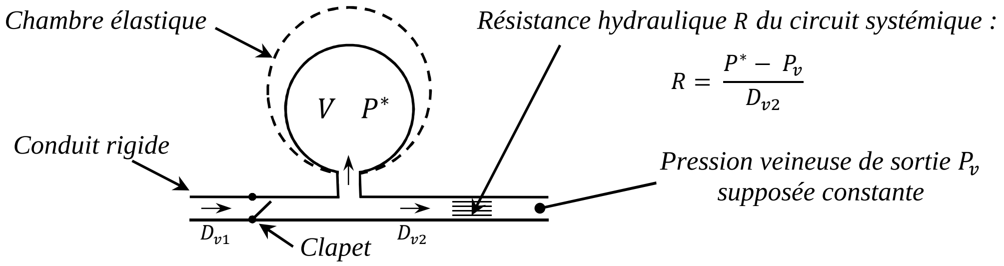
Débit cardiaque $D_c = 5{,}0\ \text{L.min}^{-1}$
Pression au sein de la veine cave $P_{vc} = 399\ \text{Pa}$
Pression au sein de l'aorte $P_a = 12\,635\ \text{Pa}$
Diamètre de l'aorte $d_a = 2{,}0\ \text{cm}$
Viscosité dynamique du sang $\eta = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Masse volumique du sang $\rho = 1060\ \text{kg.m}^{-3}$

B / MODELE A ECOULEMENT PERIODIQUE – EFFET WINDKESSEL

Le modèle à écoulement permanent ne peut décrire complètement l'écoulement du sang dans le système vasculaire. En effet, le sang ne sort pas du cœur de façon continue mais périodiquement. Le régime est pulsé. En 1899, Otto Franck fournit une théorie connue sous le nom d'effet « Windkessel » (« chambre à air » en allemand) où l'élasticité des artères à la sortie du cœur joue un rôle fondamental (voir le ***document 5****).*

<u>Document 5</u> : Présentation du modèle de Windkessel

Dans ce modèle simplifié, l'élasticité des artères est prise en compte par la représentation d'une chambre d'accumulation élastique. Cette chambre, de pression intérieure $P^*(t)$ et de volume $V(t)$, variables au cours du temps, branchée sur un conduit rigide, précédée par un clapet (représentant la valve aortique), est suivie d'une résistance hydraulique R supposée ***constante*** *(représentant la résistance du circuit systémique alimentant les différents organes). Cette résistance mène ensuite au système veineux de pression P_v supposée* ***constante****.*



Quand le clapet est ouvert (phase ***systolique****), le sang issu du ventricule gauche du cœur, s'accumule, pour partie, dans la chambre élastique, et s'échappe, pour l'autre partie, au travers la résistance hydraulique.*
Quand le clapet est fermé (phase ***diastolique****), le sang accumulé dans la chambre s'échappe à son tour au travers la résistance hydraulique assurant ainsi une alimentation en continu des différents organes avec un débit certes variable mais jamais nul.*
La capacité des artères à se déformer est caractérisée par une grandeur appelée ***compliance*** *C supposée* ***constante****. Pour une variation dV de volume de la chambre élastique, observée pour une variation dP^* de pression en son sein, la compliance C a pour expression :*

$$C = \frac{dV}{dP^*}$$

B1. Durant la phase systolique, écrire et justifier la relation entre D_{v1}, D_{v2} et $\frac{dV}{dt}$.
En déduire que les équations différentielles vérifiées par la pression P^*, puis par la pression P (définie par le changement de variable suivant : $P(t) = P^*(t) - P_v$), ont pour expressions :

$$RC\,\frac{dP^*}{dt} + (P^* - P_v) = R\,D_{v1} \qquad\qquad RC\,\frac{dP}{dt} + P = R\,D_{v1}$$

B2. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension du produit RC que l'on notera τ par la suite.

Pendant la durée t_0 de la phase systolique, on considèrera que ***D_{v1} = cste = A****. On notera P_1 et P_0 respectivement les pressions au début et à la fin de cette phase.*

B3. Vérifier que la solution de l'équation différentielle est de la forme suivante :

$$P(t) = \alpha + \beta\, e^{-t/\tau}$$

Déterminer les expressions des constantes α et β.

B4. Exprimer la pression P_0 en fonction de P_1, R, A, t_0 et τ.

B5. Dans le cas de la phase diastolique, donner l'équation différentielle vérifiée par P.
En prenant cette fois-ci comme origine des dates le moment de la fermeture du clapet, la solution de l'équation différentielle est :

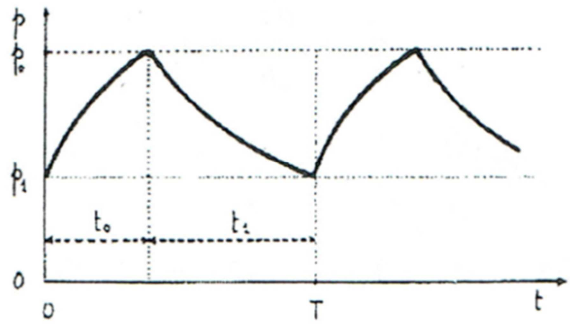
$$P(t) = P_0 \, e^{-t/\tau}$$

En admettant qu'à la fin de cette phase diastolique, de durée t_1, la pression est revenue à P_1, exprimer P_1 en fonction de P_0, τ et t_1.

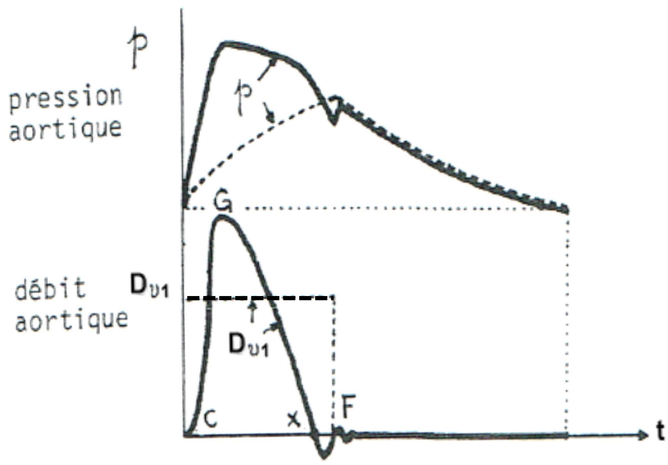
B6. La critique du modèle

Les équations établies aux ***questions B3, B4 et B5*** *permettent de tracer la courbe de la pression aortique en fonction du temps dans le modèle de Windkessel (voir* ***document 6****).*
Dans le ***document 7****, on donne l'allure des enregistrements physiologiques de pression et de débit aortiques réalisés sur un patient.*
Indiquer la différence entre l'enregistrement de pression du patient et le modèle de Windkessel. Expliquer les écarts constatés.

<u>Document 6</u> : Pression aortique (Modèle de Windkessel) en fonction du temps



<u>Document 7</u> : Enregistrements physiologiques d'un patient



Comparaison entre les enregistrements physiologiques de pression et de débit aortiques, et les résultats de la modélisation de Windkessel.

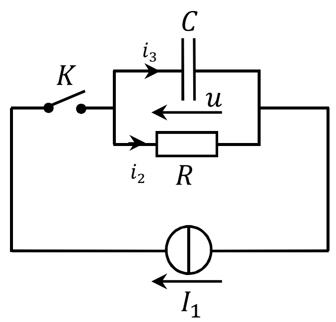
——— *enregistrements physiologiques*

- - - - *modèle de Windkessel*

C / EFFET WINDKESSEL ET ANALOGIE ELECTRIQUE

*Dans cette partie nous étudierons le schéma électrique présenté dans le **document 8**.*

<u>Document 8</u> : ***Circuit électrique alimenté par une source idéale de <u>courant</u>***



C1. Utiliser les lois de l'électrocinétique afin d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes des deux dipôles en dérivation lorsque l'interrupteur K est fermé.

C2. Établir l'équation différentielle lorsqu'on ouvre l'interrupteur K.

C3. Le modèle de ce circuit est-il une bonne équivalence électrique du modèle de Windkessel ? Justifier la réponse.

C4. Dans le cadre de cette analogie, et en s'appuyant sur les questions B1 et C1, donner la grandeur électrique analogue à la compliance du système artériel.

C5. Rappeler l'expression de l'énergie emmagasinée dans un condensateur.

C6. En déduire l'expression de l'énergie emmagasinée dans la chambre d'accumulation élastique pour une pression P donnée. Quelle est la nature de cette énergie ? Présenter une situation physique présentant une autre analogie possible avec cette forme d'énergie.